CONCOURS 2021 D'ADMISSION DANS LES ECOLES DU SERVICE DE SANTE DES ARMEES

CATEGORIE BACCALAUREAT – Sections : Médecine, Pharmacie

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Avril 2021

Durée : 1 heure 30 minutes
Coefficient 3

<u>Avertissement :</u>
L'utilisation de calculatrice, règle de calcul, formulaire, papier millimétré, téléphone portable n'est pas autorisée.

- Le candidat traitera les trois exercices ;
- Les réponses des exercices 1 et 2 seront données sur la grille prévue à cet effet ;
- L'exercice 3 sera traité sur une copie à part ;
- La qualité de la présentation des copies et de l'orthographe sera prise en compte dans l'évaluation ;
- Le candidat vérifiera que le sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

EXERCICE 1 (6 points)

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.
On demande au candidat d'indiquer ***sans justification*** *la réponse qui lui paraît exacte* ***en cochant la case sur la grille prévue à cet effet.***
Toute réponse juste est comptée + 1 point, toute réponse fausse est comptée – 0,25 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

QCM 1

Les solutions réelles de l'équation $3(lnx)^2 + 2lnx - 5 = 0$ sont :

A. $\left\{1; -\frac{5}{3}\right\}$ B. $\left\{e; e^{-\frac{5}{3}}\right\}$ C. $\left\{e^{-\frac{5}{3}}\right\}$ D. $\{e\}$

QCM 2

Les solutions réelles de l'inéquation $(e^x - 1)(1 - x) \geq 0$ sont :

A. $]-\infty; 1]$ B. $[0; 1]$ C. $[0; +\infty[$ D. $]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

QCM 3

Les solutions réelles de l'inéquation $\ln(-x + 5) < \ln(x + 1)$ sont :

A. $]2; +\infty[$ B. $]-\infty; 5[$ C. $]-1; 5[$ D. $]2; 5[$

QCM 4

La limite de $\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$ en $+\infty$ est égale à :

A. $+\infty$ B. 1 C. 0 D. 2

QCM 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2-1}$, alors :

A. $f'(x) = e^{x^2-1}$ B. $f'(x) = 2xe^{x^2-1}$

C. $f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2-1}$ D. $f'(x) = 2x^2e^{x^2+1}$

QCM 6

L'intégrale $I = \int_0^{\pi} xcoxdx$ est égale à :

A. -2 B. 0 C. 1 D. π

(Indication : on pourra calculer la dérivée de la fonction h définie par $h(x) = xsinx + cosx$)

EXERCICE 2 (6 points)

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.
On demande au candidat d'indiquer ***sans justification*** *la réponse qui lui paraît exacte* ***en cochant la case sur la grille prévue à cet effet****.*
Toute réponse juste est comptée + 1 point, toute réponse fausse est comptée – 0,25 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Pour les QCM 7 et 8, on considère une population dont 5% est touchée par une maladie.

QCM 7

On choisit de manière aléatoire et indépendante deux personnes de cette population.
Soit l'événement A : « aucune personne n'est malade ». La probabilité de A est égale à :

A. 0,9025 B. 0,0025 C. 0,9975 D. 0,1

QCM 8

On sait que la probabilité qu'une personne ait un test positif à cette maladie, sachant qu'elle est malade, est 0,8. D'autre part, la probabilité d'avoir un test positif pour une personne de cette population est 0,1.
La probabilité que la personne soit malade sachant qu'elle a un test positif est égale à :

A. 0,8 B. 0,01 C. 0,4 D. 0,04

QCM 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} + 3x - 1$ et C sa courbe représentative dans un repère. La tangente à C au point d'abscisse 0 a pour équation :

A. $y = 5x - 1$ B. $y = 5x$ C. $y = 4x$ D. $y = 5x - 1$

QCM 10

Soit la suite réelle (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1{,}5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$

A. La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = 2x - 1$
B. La suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 1$ est géométrique
C. La suite (u_n) est majorée
D. La suite (u_n) est décroissante

QCM 11

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 10n + 1$. Alors :

A. La suite converge vers 1 B. La suite diverge vers $+\infty$
C. La suite converge vers 0 D. La suite diverge vers $-\infty$

QCM 12

La solution y de l'équation différentielle $2y' - y = 3$ vérifiant $y(0) = -1$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

A. $y(x) = e^{2x} - 2$ B. $y(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 3$ C. $y(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 1$ D. $y(x) = e^{2x-3}$

EXERCICE 3 (8 points)

Un virus sévit dans une population. Un test (gold standard) permet de dire avec certitude si un individu de la population est malade ou non. Mais il est coûteux et invasif. Dans la pratique, on met donc plutôt en place un test sérologique, dont les indicateurs caractéristiques - la sensibilité et la spécificité - sont définis ci-après.

On prélève au hasard un individu de la population et l'on considère les événements :

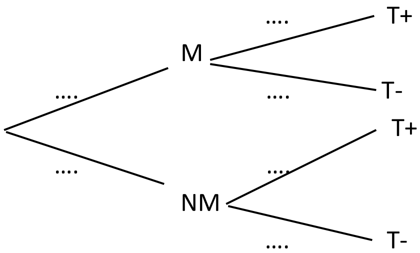
- M : « l'individu est malade » ;
- NM : « l'individu n'est pas malade » ;
- $T+$: « l'individu a un test positif » ;
- $T-$: « l'individu a un test négatif » .

On note :

- p la probabilité que l'individu soit malade, on l'appelle la prévalence de la maladie ;
- S_e la sensibilité du test : $S_e = P_M(T+)$;
- S_p la sensibilité du test : $S_p = P_{NM}(T-)$.

I. Quelques Calculs

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous à l'aide de p, S_e et S_p.



2) On appelle valeur prédictive positive du test le nombre : $VPP = P_{T+}(M)$.

Montrer que $VPP = \frac{S_e \times p}{S_e \times p + (1-p) \times (1-S_p)}$

3) On suppose dans cette question que la prévalence est de 30 %, que la sensibilité du test est de 90 % et que la spécificité du test de 90 %.

a) Calculer la VPP du test sérologique.

b) Le test a-t-il un intérêt ?

4) On suppose dans cette question que la prévalence est de 1 %, que la sensibilité du test est de 90 % et que la spécificité du test de 90 %.

a) Calculer la VPP du test sérologique.

b) Le test a-t-il un intérêt ?

c) Quel problème se pose-t-il en cas de maladie rare ?

5) La VPP d'un test sérologique n'est pas toujours un indicateur satisfaisant. On s'intéresse alors à un autre indicateur, le ratio de vraisemblance positif du test, défini par :

$$RV+=\frac{P_M(T+)}{P_{NM(T+)}}$$

a) Exprimer le $RV+$ en fonction des indicateurs caractéristiques du test.

b) Calculer le $RV+$ du test avec les données de la question 3) puis celles de la question 4).

c) On admet que plus le $RV+$ est grand, plus la VPP est grande.

D'après la question précédente, le $RV+$ est-il suffisant pour conclure à la fiabilité du test sérologique ? Si on a plusieurs tests sérologiques possibles, comment choisir S_e et S_p pour avoir le test le plus significatif ?

II. En situation clinique

Le médecin cherche surtout à ne pas "passer à côté d'une maladie" et accepte "d'alerter à tort" un patient. Il abaisse le seuil de positivité du test sérologique. Quelle est la conséquence :

1) sur S_e et S_p ?
2) sur le nombre de « faux positifs » ?

III. La courbe ROC

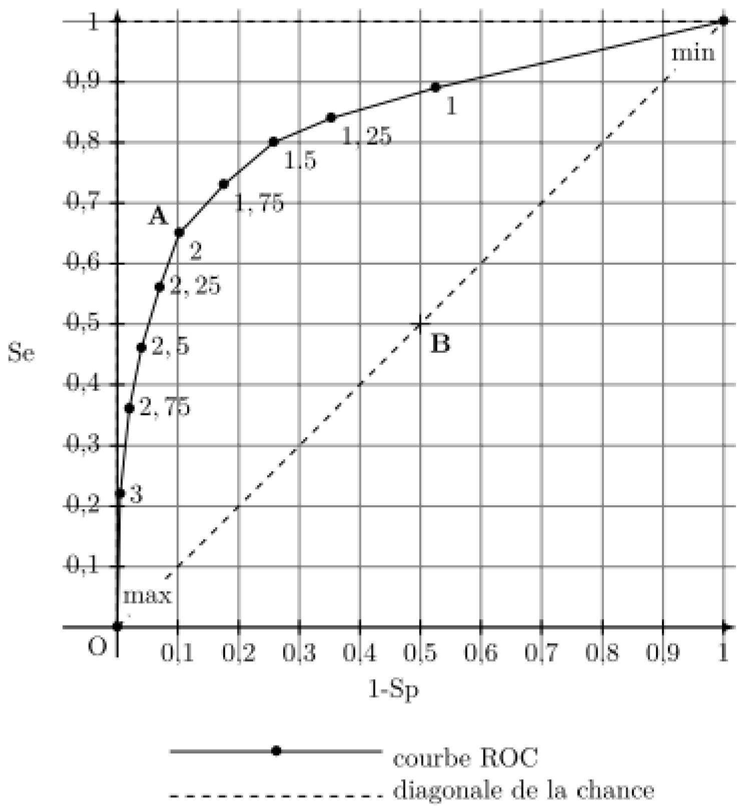
On vient de voir que l'on pouvait agir sur le seuil de positivité du test.

Lors du dépistage de la trisomie 21, le test consiste à mesurer l'indicateur HCG.

On donne le tableau suivant :

Seuil	$\boldsymbol{S_p}$	$\boldsymbol{1-S_p}$	$\boldsymbol{S_e}$
Max	1	0	0
3	0,995	0,005	0,22
2,75	0,98	0,02	0,36
2,5	0,96	0,04	0,46
2,25	0,93	0,07	0,56
2	0,8975	0,1025	0,65
1,75	0,825	0,175	0,73
1,5	0,7425	0,2575	0,8
1,25	0,6475	0,3525	0,84
1	0,475	0,525	0,89
Min	0	1	1

On reporte ces données sur le graphique suivant :



1) Pour un seuil de sensibilité 2 correspondant au point A :

a) Que vaut alors RV+ à 10^{-2}près ?

b) Interpréter graphiquement cette valeur.

2) Pour le point B du graphique :

a) Que vaut RV+ ?

b) Que dire alors de ce test sérologique ?

3) A quel point du graphique correspond le test parfait (le définir par ses coordonnées dans le repère d'une courbe ROC) ?

4) La capacité diagnostique d'un test peut être quantifiée par l'aire sous la courbe ROC.

a) Que vaut cette aire lorsque ce test n'a pas d'intérêt ?

b) Que vaut cette aire lorsque le test est parfait ?

c) Comment doit être cette aire pour que le test soit le meilleur possible ?

FEUILLE REPONSES QCM

Cocher dans les grilles suivantes la bonne réponse des QCM 1 à 12.

Exercice 1

	A	B	C	D
QCM 1				
QCM 2				
QCM 3				
QCM 4				
QCM 5				
QCM 6				

Exercice 2

	A	B	C	D
QCM7				
QCM8				
QCM9				
QCM10				
QCM11				
QCM12				